16届非数A类非恰当微分方程的积分因子求解

> 当时做的时候就感觉是约去了个因子，但是找半天没找到，下来查找参考文献作此文档梳理 ——*20241109*

求解微分方程

$$\left(x^3-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+xy\right)\mathrm{d}y=0$$

令 $M=x^3-y^2$，$N=x^2y+xy$，有 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy+y$，发现 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程为非恰当微分方程

注意到 $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=-3y-2xy=-y\left(3+2x\right)$ 可以提出来一个 y 的因子，而剩下一个只含 x 的表达式

而刚好 $N=x^2y+xy=y\left(x^2+x\right)$ 也可以提出来一个 y 的因子，而剩下一个只含 x 的表达式

因此有

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-y\left(3+2x\right)}{y\left(x^2+x\right)}=-\frac{3+2x}{x^2+x}=\phi\left(x\right)$$

得积分因子

$$u\left(x\right)=e^{\int\phi(x)\mathrm{d}x}=e^{\int-\frac{3+2x}{x^2+x}\mathrm{d}x}=e^{-\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x}=e^{\ln|x+1|-3\ln|x|}=\left|\frac{x+1}{x^3}\right|$$

考虑到正负号对方程无影响（可以约掉），取 $u(x)=\dfrac{x+1}{x^3}$

因此原微分方程可以化为

$$\frac{x+1}{x^3}(x^3-y^2)\mathrm{d}x+\frac{x+1}{x^3}(x^2y+xy)\mathrm{d}y=0$$

令 $P=\dfrac{x+1}{x^3}(x^3-y^2)$，$Q=\dfrac{x+1}{x^3}(x^2y+xy)$，注意到 P 对 x 积分略显复杂，而 Q 刚好可以提出一个 y，积分十分简单

因此有

$$f(x,y)=\int Q\mathrm{d}y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\int y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2y^2+\psi(x)$$

然后让 f 对 x 求偏导去对应 P

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\text{省略一些步骤}=-\frac{x+1}{x^3}y^2+\psi'(x)\\ P&=\frac{x+1}{x^3}(x^3-y^2)=-\frac{x+1}{x^3}y^2+x+1\end{aligned}$$

得 $\psi'(x)=x+1$，$\psi(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2y^2+\dfrac{1}{2}x^2+x$

因此得原微分方程的解为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2y^2+\frac{1}{2}x^2+x=\mathrm{C}$$

下面是参考文献里的部分结论的摘抄，其中积分因子 $u(x)=e^{\int\phi(x)\mathrm{d}x}$，值得注意的是，**积分因子不是唯一的**

结论1

$$\begin{aligned}&\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\phi(x),\quad\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\phi(y),\quad\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\phi(x+y)\\ &\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\phi(xy)\end{aligned}$$

结论2

如果 M 和 N 在 D 内连续且有连续偏导数，且都为同次齐次方程，且满足 $xM+yN\neq 0$，有

$$u(x,y)=\frac{1}{xM+yN}$$

结论3

如果 $M=y\Phi(v)$，$N=x\Psi(v)$，$v=xy$，且满足 $xM-yN\neq 0$，有

$$u(x,y)=\frac{1}{xM-yN}$$

参考例题

1. $(x^4+y^4)\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}y=0$，$u(x)=\dfrac{1}{x^5}$
2. $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$，$u(y)=\dfrac{1}{y^2}$
3. $[(x+y)^2+x+y]\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$，$u(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^2}$
4. $(3xy-2y^2+4y)\mathrm{d}x+(2x^2-3xy+4x)\mathrm{d}y=0$，$u(xy)=\dfrac{1}{xy}$
5. $y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$，$u(x,y)=\dfrac{1}{xy^2+x^2y}$
6. $(xy^2+y)\mathrm{d}x+(x^2y-x)\mathrm{d}y=0$，$u(x,y)=\dfrac{1}{2xy}$

本文主要参考恰当方程积分因子通解微分方程论文.doc

其他阅读

1. 【常微分方程】积分因子法 - 槿灵兮的文章 - 知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/436015309
2. 积分因子法解微分方程 - Bingyan Liu的文章 - 知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/26661013